УДК 517.9

ОБ УСРЕДНЕНИИ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

©Н. В. Краснощек

Рассмотрим простейшую модель кристаллизации двухкомпонентного материала с наполнителем в виде однонаправленных волокон. Нашей целью будет изучить поведение температурного поля при условии, что густота расположения волокон увеличивается, а их поперечные размеры уменьшаются.

Постановка задачи основана на квазистационарном подходе, т.е. предположении, что граница раздела фаз жидкость - твердое тело движется с постоянной скоростью вдоль осей расположения волокон.

Рассмотрим в пространстве R^2 координат y_i фиксированную ячейку $Y = (0;1) \times (0;1)$, а также ячейки, полученные сдвигом Y на векторы вида (m_1, m_2), где m_i целые числа. Пусть период Y разделен гладкой поверхностью Γ на две подобласти Y_1 и Y_2, причем $\overline{Y} \subseteq Y$.

Пусть Q - ограниченная область в пространстве R^2 координат x_i с кусочно-гладкой границей. Пусть Q имеет периодическую структуру, т.е.

$$Q = Q^1_\varepsilon \cup Q^2_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon;$$

$$Q^i_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in Q | \ (x_1, x_2) \in \varepsilon Y_i\};$$

$$\Gamma_\varepsilon = \partial Q^1_\varepsilon \cap Q.$$

Считаем, что заданный материал занимает в R^3 область Ω, которая имеет вид:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in Q; \ x_3 \in (-H; H)\}.$$

Пусть ось расположения волокон совпадает с осью Ox_3 и их сечения в плоскости $x_3 = const$ имеют периодическую структуру, т.е. волокна занимают многосвязную область

$$\Omega^1_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in Q^1_\varepsilon; \ x_3 \in (-H; H)\}.$$

В квазистационарном режиме температурное поле в каждой из фаз описывается уравнением:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}(a^{(k)}_{ij}\frac{\partial \theta^{(k)}}{\partial x_j}) = \nu b^{(k)} \frac{\partial \theta}{\partial x_3}; \quad i, j = \overline{1,3}. \tag{1}$$

Здесь и далее по повторяющимся нижним индексам производится суммирование, а индекс сверху обозначает принадлежность одной из компонент материала.

На границе раздела фаз $\Phi^{(k)}$ условие Стефана имеет вид:

$$\begin{gathered}(a^{(k)}_{ij}\frac{\partial \theta^{(k)}}{\partial x_j}, n^{(k)}_i) + \nu\lambda^{(k)} \cos(n^{(k)}, x_3) = 0;\\ \theta^{(k)} = \tau^{(k)}\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь θ - температура; a_{ij}, b - коэффициенты теплопроводности и теплоемкости; ν - скорость движения фронта кристаллизации; n - нормаль к Φ, направленная в сторону уменьшения температуры; λ, τ - скрытая теплота и температура кристаллизации.

Предполагаем, что на верхней (Γ_+) и нижней (Γ_-) "крышке" цилиндра Ω заданы температуры

$$\theta^{(k)}(x) = \tau_\pm, \ x \in \Gamma_\pm \cap \partial\Omega^{(k)}; \tag{3}$$

а на боковой грани (Γ_N) задан теплообмен

$$(a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \theta^{(k)}}{\partial x_j}, n_i) = \alpha(\theta^{(k)}(x) - \rho(x)); \tag{4}$$

при $x \in \Gamma_N \cap \partial\Omega^{(k)}$, где ρ - заданная функция, α - положительная константа, а n - в данном случае внешняя нормаль к Γ_N.

Кроме того, считаем, что на поверхностях раздела двух материалов выполнены условия сопряжения

$$\theta^{(1)} = \theta^{(2)};$$

$$(a_{ij}^{(1)} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x_j}, n_i) = (a_{ij}^{(2)} \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x_j}, n_i) \tag{5}$$

здесь n - нормаль к поверхности раздела. Подчеркнем, что искомыми являются как температура $\theta^{(k)}$ так и поверхность фазового перехода $\Phi^{(k)}$.

Введем обозначения:

$$x^1 = (x_1, x_2);$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) | \ v|_{\Gamma_+} = 0; \ v|_{\Gamma_-} = 0\};$$

$$\beta^{(k)}(v) = \begin{cases} b^{(k)}(v - \tau^{(k)}) + \lambda^{(k)} & \text{при} \ \ v > \tau^{(k)}; \\ [0, \lambda^{(k)}] & \text{при} \ \ v = \tau^{(k)}; \\ b^{(k)}(v - \tau^{(k)}) & \text{при} \ \ v < \tau^{(k)}; \end{cases}$$

$$\beta^\varepsilon(x^1, v) = \beta(\frac{x^1}{\varepsilon}, v);$$

$$\beta(y, v) = \beta^{(k)}(v) \ \text{при} \ y \in Y_k.$$

Аналогично β^ε вводятся функции a_{ij}^ε, b^ε, τ^ε, λ^ε.

Обобщенная постановка задачи (1) - (5) (при фиксированном малом ε) имеет вид:
Найти пару функций (θ, η) таких, что

$$(\theta, \eta) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega); \tag{6}$$

$$\int_\Omega \{a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \nu b^\varepsilon \eta \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\} dx = \alpha \int_{\Gamma_N} (\rho - \theta) \varphi d\sigma \quad \forall \varphi \in V, \tag{7}$$

причем

$$\theta|_{\Gamma_+} = \tau_+; \quad \theta|_{\Gamma_-} = \tau_-; \quad \eta(x) \in \beta^\varepsilon(x^1, \theta(x)) \tag{8}$$

для почти всех $x \in \Omega$.

Будем обозначать задачу (6)-(8) как задачу P_ε, а ее решение $(\theta^\varepsilon, \eta^\varepsilon)$. Предполагаем, что:
1) τ_+, τ_- - константы, такие что $\tau_- < \tau_+$;
2) a_{ij}^ε, b^ε, τ^ε, λ^ε - кусочно-постоянные, εY - периодические функции такие, что:

$b^\varepsilon \geq 0$, $\lambda^\varepsilon \geq 0$, $\tau_- \leq \tau^\varepsilon \leq \tau_+$;

$a_{ij}^\varepsilon = a_{ji}^\varepsilon$, $\mu_1 |\xi|^2 \leq a_{ij}^\varepsilon \xi_i \xi_j \leq \mu_2 |\xi|^2$, $\forall \xi \in R^3$;

$0 < \mu_1 \leq \mu_2 < +\infty$;

3) $\rho \in L^3(\Gamma_N)$;
4) ν, α - положительные константы.

Квазистационарной задаче Стефана посвящено большое количество работ, см. например, [1], [2].

Теорема 1. *Существует по крайней мере одно решение*

$$(\theta^\varepsilon, \eta^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \cap C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \times L^\infty(\Omega)$$

задачи P^ε, *причем* $\gamma > 0$ *- не зависит от* ε *и*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |\theta^\varepsilon(x)| \leq \max\{|\tau_+|, |\tau_-|\} \tag{9}$$

Для доказательства нам необходима следующая лемма:

Лемма. *([3]) Определим* g *как единственное решение краевой задачи:* $g \in H^1(\Omega)$, $g|_{\Gamma_+} = \tau_+$, $g|_{\Gamma_-} = \tau_-$;

$$\int_\Omega a^\varepsilon_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\nu \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \alpha \int_{\Gamma_N} (\rho - g)\varphi d\sigma; \quad \forall \varphi \in V,$$

тогда справедлива оценка

$$||g||_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq c(||f||_{L^\infty(\Omega)} + ||\rho||_{L^3(\Omega)} + \max\{|\tau_+|, |\tau_-|\}, \tag{10}$$

где c, γ *- положительные константы, зависящие только от* μ_1, μ_2, ν, α, *области* Ω *и размерности пространства.*

Доказательство проводится в полной аналогии с доказательством теоремы 1 работы [1]. Для этого нужно сгладить функцию β в каждой из областей Ω^1_ε, Ω^2_ε; рассмотреть регуляризованную задачу и применить теорему Шаудера о неподвижной точке, используя оценку (10). Затем перейти к пределу по параметру сглаживания.

Перейдем к задаче усреднения. Усреднение в нестационарной двухфазной задаче Стефана было проведено в работе [4] в случае периодичности коэффициентов по всем пространственным переменным.

Введем следующие обозначения (см. [5])

$$< f(y) >= \int_Y f(y) dy; \tag{11}$$

$$\beta^*(\theta) =< \beta(y, \theta) >;$$

$$a^*_{ij} =< a_{ij}(y) > + < a_{ik}(y) \frac{\partial w_j(y)}{\partial y_k} >; \tag{12}$$

$i, j, k = 1, 2, 3$; где $w_3(y) = 0$, а w_j при $j = 1, 2$ определяется из решения задачи: $w_j \in H^1(Y)$

$$\int_Y a_{ik} \frac{\partial w_j}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = - \int_Y a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy; \quad \forall \varphi \in H^1(Y);$$

$(i, j, k = 1, 2)$; w_j - Y - периодическая функция.

Интеграл от многозначной функции в формуле (12) определим по следующему правилу (см. [6]):

$$\int_Z [a; b] dx = [a \cdot \text{mes} Z, b \cdot \text{mes} Z].$$

Определим теперь предельную задачу P^*: найти пару функций (θ, η) таких, что $(\theta, \eta) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$;

$$\int_\Omega \{a^*_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \nu \eta \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\} dx = \alpha \int_{\Gamma_N} (\rho - \theta) \varphi d\sigma \quad \forall \varphi \in V$$

причем $\theta|_{\Gamma_+} = \tau_+$; $\theta|_{\Gamma_-} = \tau_-$; $\eta(x) \in \beta^*(x^1, \theta(x))$ для $x \in \Omega$.

Обозначим (θ^*, η^*) - пару, являющуюся решением задачи P^*.

Теорема 2 . *Пусть* $(\theta^\varepsilon, \eta^\varepsilon)$ *- последовательность решений задач* P^ε, *тогда существует подпоследовательность такая, что:* $\theta^\varepsilon \to \theta^*$ *в* $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ *и слабо в* $H^1(\Omega)$; $\eta^\varepsilon \to \eta^*$ $\star$ *- слабо в* $L^\infty(\Omega)$, *где* (θ^*, η^*) *- некоторое решение задачи* P^*.

Доказательство теоремы 2 проводится методом Тартара (см. [5]). Укажем здесь некоторые особенности.

Из оценки (9) и представления β^ε легко следует оценка

$$||\eta^\varepsilon||_{L^\infty(\Omega} \leq c.$$

Из интегрального тождества (7) и леммы можно также получить (равномерную по ε) ограниченность θ^ε в нормах $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $H^1(\Omega)$.

Пусть $\eta^\varepsilon \to \eta^*$ $\star$ - слабо в $L^\infty(\Omega)$; $\theta^\varepsilon \to \theta^*$ в $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ и слабо в $H^1(\Omega)$ для некоторой пары (θ^*, η^*) и подпоследовательности $(\theta^\varepsilon, \eta^\varepsilon)$ тогда, в частности, $\theta|_{\Gamma_+} = \tau_+$, $\theta|_{\Gamma_-} = \tau_-$.

Для предельного перехода в правой части (7) нужно воспользоваться компактностью вложения $H^1(\Omega)$ в $L^2(\partial\Omega)$ а также слабой сходимостью к нулю функций $\varepsilon w_i(\frac{x^1}{\varepsilon})$ и их первых производных. Действительно, т.к. w_i по определению являются εY - периодическими функциями, они слабо в $L^2(\Omega)$ сходятся к своим средним, определенным формулой (11). Легко видеть, что, к примеру,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\varepsilon w_1(\frac{x^1}{\varepsilon})) = \frac{\partial}{\partial y_1}(w_1(\frac{x^1}{\varepsilon}));$$

значит

$$< \frac{\partial}{\partial y_1} w_1(y) >= \int\limits_Y \frac{\partial w_1}{\partial y_1} dy = \int\limits_{\partial Y} w_1 \cos(n, y_1) = 0$$

в силу Y - периодичности функции $w_1(y)$.

Далее докажем, что $\eta^* \in \widehat{\beta}(\theta^*)$. Следуя работе [4] введем функцию $\omega_c^\varepsilon(x) = \beta^\varepsilon(x, c)$ для константы c отличной от τ^1 и τ^2. Введем также функцию $\mu^\varepsilon(x)$:

$$\mu^\varepsilon(x) = (\eta^\varepsilon(x) - \omega_c^\varepsilon(x))(\theta^\varepsilon(x) - c).$$

В силу монотонности β^ε имеем $\mu^\varepsilon(x) \geq 0$. Из εY - периодичности функции ω_c^ε следует, что $\omega_c^\varepsilon \to \beta^*(c)$ слабо в $L^2(\Omega)$. Из вышеизложенного следует, что μ^ε слабо в $L^2(\Omega)$ сходится к некоторой μ^*, причем

$$\mu^*(x) = (\eta^*(x) - \beta^*(c))(\theta^*(x) - c) \geq 0. \qquad (13)$$

Зафиксируем x и рассмотрим отдельно случаи, когда $\theta^*(x) = \tau^1$ ($\theta^*(x) = \tau^2$) и $\theta^*(x) \neq \tau^1, \theta^*(x) \neq \tau^2$. Пусть $\theta^*(x) = \tau^1$. Возьмем тогда в неравенстве (13) $c_+ = \tau^1 + \delta$ ($c_- = \tau^1 - \delta$), для малого $\delta > 0$. Тогда при δ стремящемся к нулю получим, что

$$\eta^*(x) \in [\lim_{\tau \to \tau^1 - 0} \beta^*(\tau); \lim_{\tau \to \tau^1 + 0} \beta^*(\tau)].$$

Если же $\theta^*(x)$ отлично и от τ^1 и от τ^2, то т.к. $\theta^*(x)$ непрерывна на Ω, можем рассмотреть неравенство (13) в малой окрестности x, так чтобы $\theta^*(x) \pm \delta \neq \tau_1$, $\theta^*(x) \pm \delta \neq \tau_2$ для всех $\delta \in [0, \delta_0]$ где δ_0 достаточно мало. Положим теперь $c_\pm = \theta^*(x) \pm \delta$ и перейдем к пределу в (13) при δ, стремящемся к нулю. По определению, функция $\beta^*(\theta^*(x))$ терпит разрывы только при $\theta^*(x) = \tau^1, \theta^*(x) = \tau^2$, следовательно $\eta^*(x) = \beta^*(\theta^*(x))$. Таким образом, включение $\eta^*(x) \in \beta^*(\theta^*(x))$ для почти всех x из Ω доказано.

1. *Rodriques J.-F.*, Aspects of the variational approach to a continuous casting problem // Research Notes in Math. - 1985. - **120**, - C. 72–83.
2. *Данилюк И.И.* , О задаче Стефана // УМН. - 1985. - **40**, - N 5. - C. 133–171.
3. *Murthy M.K.V.*, *Stampaccia G.*, A variational inequality with mixed conditions // Israel J. Math. - 1972. - **13**, - C. 188-224.
4. *Damlamian A.*, How to homogenize a nonlinear diffusion equation Stefan's problem // SIAM J. Math. Anal. - 1981. - **12**, - N 3. - C. 306–313.
5. *Санчес- Паленсия Е.* , Неоднородные среды и теория колебаний // М. : Мир, - 1984.
6. *Arstein Z.*, On the calculus of closed set - valued functions // Indiana Univ. Math. J. - 1974. - **24**, - N 5. - C. 433–442.